Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών

Γιάννης Π. Πλατάρος[1] ,Αθηνά Δ. Παπαδοπούλου[2]

[1] Εκ/κος Δ.Ε. νομού Μεσσηνίας ,ΜΠΕ :Διδ/κη & Μεθ/γία Μαθηματικών Εκπαιδευτής Β΄ επιπέδου , plataros@sch.gr
[2]Μαθηματικός, Μετ. φοιτ. ΜΔΕ Διαφορικές Εξισώσεις και Δυναμικά Συστήματα. athenamath@hotmail.com

Περίληψη

Θεωρητικά, το πείραμα στη γεωμετρία αποτελεί ξένο σώμα. Όμως, πρακτικά κατέχει τον πρωταρχικό και δεσπόζοντα ρόλο στην ανακάλυψη των προτάσεων (γέννηση εικασιών, ισχυροποίησή τους) οι οποίες μέλλουν να αποδειχθούν. Αυτό είναι κάτι που επιμελώς οι μαθητικοί αποκρύπτουν, αλλά αποτελεί την ρουτίνα της μαθηματικής ανακάλυψης. Στο σχολείο, σύμφωνα με τις σύγχρονες παιδαγωγικές θεωρίες, επανανακαλύπτεται η γνώση και άρα ο πειραματισμός έχει την θέση του στη διδακτική διαδικασία.

Λέξεις κλειδιά: πειραματική, πείραμα, Γεωμετρία.

1.Εισαγωγικά

Η πλειονότητα των θετικών επιστημών και δη των Φυσικομαθηματικών, έχουν προεξάρχοντα πειραματικό χαρακτήρα. Ένα σύνηθες μοντέλο εξέλιξής τους, είναι και το εξής: Ένας μεγάλος αριθμός πειραμάτων ή παρατηρήσεων (λ.χ. 1000) γενικεύονται και θεωρητικοποιούνται μέσω μιας θεωρίας που τα εξηγεί. Σε κάποια Ιστορική στιγμή υπάρχει μια 1001^η παρατήρηση ή πείραμα που δεν συμφωνεί με τα προηγούμενα 1000. Τότε βγαίνει μια νέα θεωρία που καλύπτει τα 1000 προηγούμενα συν το 1001^ο. Η προηγούμενη θεωρία δεν πάει αμέσως «στα σκουπίδια της ιστορίας» μιας και εξηγεί τα 1000 και συνήθως είναι απλούστερη της νεωτέρας. Αυτή φαίνεται να είναι η εξέλιξη αρκετών θετικών πειραματικών επιστημών(λ.χ. Χημεία Φυσική Βιολογία) , πλην Μαθηματικών. Στα Μαθηματικά, προ της **ατελούς επαγωγής** των πειραματικών επιστημών, υπάρχει η **τέλεια επαγωγή** (η οποία δια τούτο καλείται και «μαθηματική επαγωγή») και φυσικά η απόδειξη που αποτελεί την πεμπτουσία των Μαθηματικών. Είναι όμως έτσι τα πράγματα; Η απάντηση είναι, ότι πριν δημιουργηθεί μια πρόταση ή ένα θεώρημα, υπάρχει η εικασία γι αυτό, η επαλήθευση της εικασίας με παραδείγματα, η ενδεχόμενη τροποποίηση της με κάποιο αντιπαράδειγμα, η επανα-διατύπωση της πρότασης κ.οκ. Αυτή είναι η πορεία της μαθηματικής ανακάλυψης κατά Lakatos [1] που εγγενώς, φυσικά, εμπεριέχει το πείραμα την επαλήθευση την δοκιμή-πλάνη, δοκιμή –επαλήθευση. Όλα αυτά όμως κρύβονται πίσω από την κλασική παρουσίαση -εν προκειμένω της Γεωμετρίας- με τη

δομή Θεώρημα –απόδειξη, πόρισμα-απόδειξη, πρόταση -απόδειξη κ.ο.κ. μια δομή την οποία έχουν διδαχθεί γενιές μαθητών και καθηγητών μαθηματικών, οι οποίοι έχουν αποδεχθεί ως απολύτως φυσικό έναν τέτοιο τρόπο προσέγγισης και διδασκαλίας της γνώσης. Επομένως, κάτι το διαφορετικό προσκρούει σε κατεστημένες επί αιώνες αντιλήψεις, άρα ό,τι το νεωτερικό, οφείλει να είναι τέλεια και απολύτως πειστικά τεκμηριωμένο, ξεκινώντας από την ιστορία των μαθηματικών.

2. Η Ιστορικά, πειραματική Γεωμετρία

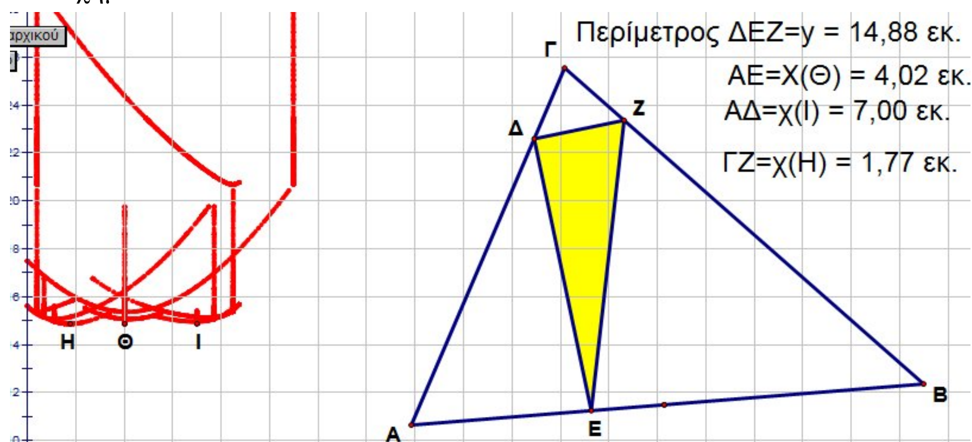
Είναι γνωστό, ότι ο Αρχιμήδης και οι "μηχανικές" του μέθοδοι , οδήγησαν σε τεράστια μαθηματική δημιουργία , όπως και του Ευδόξου και του Αρχύτα νωρίτερα, των πρώτων μεγάλων «πειραματικών μαθηματικών» (όπως εννοούμε σήμερα τον όρο «πειραματικά μαθηματικά»). Σε επιστολή προς τον Ερατοσθένη, φημισμένο μαθηματικό και λόγιο που διηύθυνε τότε τη Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, αναφέρει ο μέγιστος Έλληνας μαθηματικός : *«Πολλές πεποιθήσεις αρχικά μου δημιουργούνται με κάποια μηχανική μέθοδο, έστω και αν αυτές πρέπει να αποδειχτούν με Γεωμετρία στη συνέχεια, καθότι η ανακάλυψή τους με τη μηχανική μέθοδο δε συνιστά μια αποδεκτή απόδειξη. Είναι όμως φυσικά ευκολότερο, όταν έχουμε προηγουμένως συμπεράνει κάποια απάντηση, μ' αυτή τη μέθοδο, στο ερώτημά μας, να παράξουμε την απόδειξη που θέλουμε παρά να πετύχουμε κάτι τέτοιο χωρίς καμιά προηγούμενη ένδειξη και γνώση για την απάντηση. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, στην περίπτωση των θεωρημάτων ότι - ο όγκος του κώνου και της πυραμίδας είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου και του πρίσματος αντίστοιχα που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος - τις αποδείξεις των οποίων πρώτος έκανε ο Εύδοξος όχι μικρό μερίδιο τιμής πρέπει να αποδοθεί και στον Δημόκριτο ο οποίος ήταν ο πρώτος που τα διατύπωσε έστω και χωρίς απόδειξη.»* Όταν ο Ευκλείδης αποδεικνύει την πρόταση ότι *«Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο μέγιστο εμβαδόν έχει το τετράγωνο»*, φυσικά γνωρίζει εκ των προτέρων την αλήθεια της πρότασης πειραματικά ή διαισθητικά και την αποδεικνύει. Το ίδιο ισχύει και για το Πυθαγόρειο θεώρημα: Οι Βαβυλώνιοι ανεκάλυψαν το θεώρημα του Πυθαγόρα εμπειρικά, εκατό χρόνια πριν τη γέννηση του Πυθαγόρα. Αργότερα βεβαίως, ο Πυθαγόρας το απέδειξε .

3. Ένα ανοικτό πρόβλημα

«Να εξεταστεί αν υπάρχει, ποίο είναι και γιατί, το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου που είναι εγγεγραμμένο σε δοθέν σταθερό τρίγωνο.» Αυτό το πρόβλημα εξετάζει ένα ενδεχόμενο, χωρίς την παραμικρή ένδειξη ισχύος του και ξεκινά κυριολεκτικά από μηδενική βάση.
<u>Ερώτημα:</u> Μπορεί να διαπραγματευθεί ευχερώς αυτό το πρόβλημα ένας μαθητής ή έστω και καθηγητής μαθηματικών χωρίς νέες τεχνολογίες;

<u>Απάντηση:</u> Από την διδακτική μας εμπειρία, μπορούμε να ισχυριστούμε με κάποιο σημαντικό βαθμό βεβαιότητας, ότι η απάντηση είναι «κατά κανόνα όχι». Η μη γνώση του τριγώνου που έχει αυτή την ιδιότητα, είναι πρωταρχικός, αλλά πιθανόν και αποτρεπτικός παράγων στην έναρξη της διερεύνησης, αφού ο χρόνος διαπραγμάτευσης ενός προβλήματος με τα συνήθως κρατούντα, δεν μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλος . Ο πειραματισμός με μολύβι και χαρτί δεν προσφέρεται, καθώς η φύση του προβλήματος απαιτεί πολλές μετρήσεις, μέχρι να σχηματισθεί μια πιθανώς βάσιμη εικασία. Η συνδρομή της βιβλιογραφίας, είναι μια επίσης χρονοβόρα διέξοδος. Ίσως η καταφυγή στο διαδίκτυο να είναι αποτελεσματική μέθοδος, εάν και εφ΄ όσον είναι γνωστό και λελυμένο το πρόβλημα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το πρόβλημα είναι διάσημο και αν θέσει κάποιος στη γνωστή μηχανή αναζήτησης Google τις λέξεις κλειδιά: «τρίγωνο», «ελάχιστη», «περίμετρος» θα το βρει ως «πρόβλημα του Fagnano». [2],[3],[4],[5] όπου επιλύεται με εφαρμογή Java. Οι συντάκτες της παρούσης εργασίας, θέλοντας να εργαστούν με το δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό Sketchpad, αγνόησαν το διαδίκτυο, γνωρίζοντας μόνο, ότι πρόκειται για γνωστό πρόβλημα.

Η προσέγγιση με το sketchpad, συνίσταται στην κατασκευή του σταθερού τριγώνου ΑΒΓ, στην επιλογή τριών τυχαίων σημείων, ανά ένα σε κάθε πλευρά, στην μέτρηση της περιμέτρου και στην προσπάθεια ελαχιστοποίησής της, καθώς τα σημεία μετακινούνται επί των πλευρών. Στην προσπάθεια αυτή θα απεικονιστεί ως εξαρτημένη μεταβλητή y, η περίμετρος και ως ανεξάρτητες τα μήκη των διαδρομών των σημείων επί των πλευρών με αρχή κάποια κορυφή. Το αποτέλεσμα το βλέπουμε στο σχήμα 1:



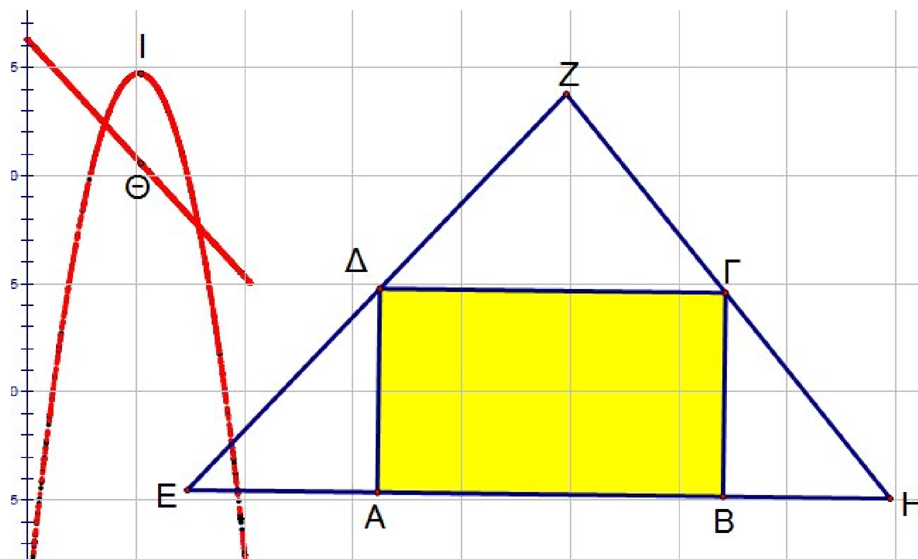
Σχήμα 1: *Το ορθικό τρίγωνο φαίνεται να είναι το ζητούμενο.*

Μέσω τις παραπάνω διεργασίας αναδεικνύονται διάφορες μαθηματικές πρακτικές, δεξιότητες και διαδικασίες, όπως:

1) Το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου είναι το ορθικό. Η πειραματική ισχυροποίηση της εικασίας σε ειδικά τρίγωνα όπως ισοσκελές, ισόπλευρο, ορθογώνιο αμβλυγώνιο, οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η ύπαρξη του τριγώνου ελαχίστης περιμέτρου, έχει νόημα για οξυγώνιο τρίγωνο μόνο, καθώς (οριακά) στο ορθογώνιο και (μη οριακά) στο αμβλυγώνιο, εκφυλίζεται σε ευθεία.
2) Η εικασία για το ορθικό τρίγωνο, βασίζεται στην οπτική αντίληψη του σχήματος. Αν ως πειραματικό οπλοστάσιο έχουμε καθορίσει ένα τρίγωνο στο οποίο έχουμε αποκρύψει τα δευτερεύοντα σημεία του (για να μην είναι πολύπλοκο το σχήμα) και τα εμφανίσουμε σε μια φάση του πειραματισμού, φθάνουμε στην εικασία ευκολότερα.
3) Η προς απόδειξη πρόταση φαίνεται να διαμορφώνεται σε «Να αποδειχθεί, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το εγγεγραμμένο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου, είναι το ορθικό»
4) Η σκέψη για εκλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής, καθώς μπορεί να επιλέγονται όχι μοναδικές κάθε φορά, αλλά πάντως οι κατάλληλες για την διερεύνηση της εικασίας μας.
5) Η ερμηνεία της καμπύλης ή των καμπυλών (λ.χ. γιατί το ένα σημείο διαγράφει κάποια –μάλλον- παραβολή (νέο ερώτημα-εικασία) γιατί τα άλλα σημεία διαγράφουν κατακόρυφη ευθεία.
6) Η ανάδειξη της επιστημονικής μεθοδολογίας, ότι όταν μια εξαρτημένη μεταβλητή εξαρτάται από τρεις άλλες και δεδομένου ότι εργαζόμαστε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στη μελέτη ακροτάτων, σταθεροποιούμε τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και μεταβάλουμε την τρίτη. (Δηλ. μια καθαρά επιστημονική ανακαλυπτική, πειραματική, πρακτική)
7) Η επέκταση της εικασίας για το εάν ισχύει ανάλογη πρόταση για το εμβαδόν (δεν ισχύει)
8) Η διασύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την ανάλυση, πράγμα που στα υπάρχοντα διδακτικά εγχειρίδια ουδόλως προβάλλεται και ουδόλως αναδεικνύεται αλλά και που αποτελεί το διδακτικό μέλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.[1]
9) Η αναζήτηση μιας περαιτέρω γενίκευσης, μπορεί να δημιουργήσει ένα ανάλογο πρόβλημα για εγγεγραμμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο υπό την έννοια του σχήματος 2, όπου θα αναζητηθεί ελάχιστη περίμετρος ή μέγιστο εμβαδόν

---

[1] Ο καθηγητής Στυλιανός Νεγρεπόντης φρονεί, ότι το μέλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μαθήματος της Δ.Ε., περνά κυρίως μέσα από την διασύνδεσή της με την Ανάλυση και με αντίστοιχη μη έμφαση στην διδασκαλία των προφανών διαισθητικά ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων(Εκφρασθείσα γνώμη σε «στρογγυλό τραπέζι» στην ημερίδα της «Επιστημονικής Ένωσης για την Διδακτική των Μαθηματικών» την 20η Δεκ. 2008 στην Πανεπιστημιούπολη Ιλισίων.) Προφανώς, ο συνδετικός κρίκος είναι η διδακτική αξιοποίηση των δυναμικών Γεωμετρικών λογισμικών.

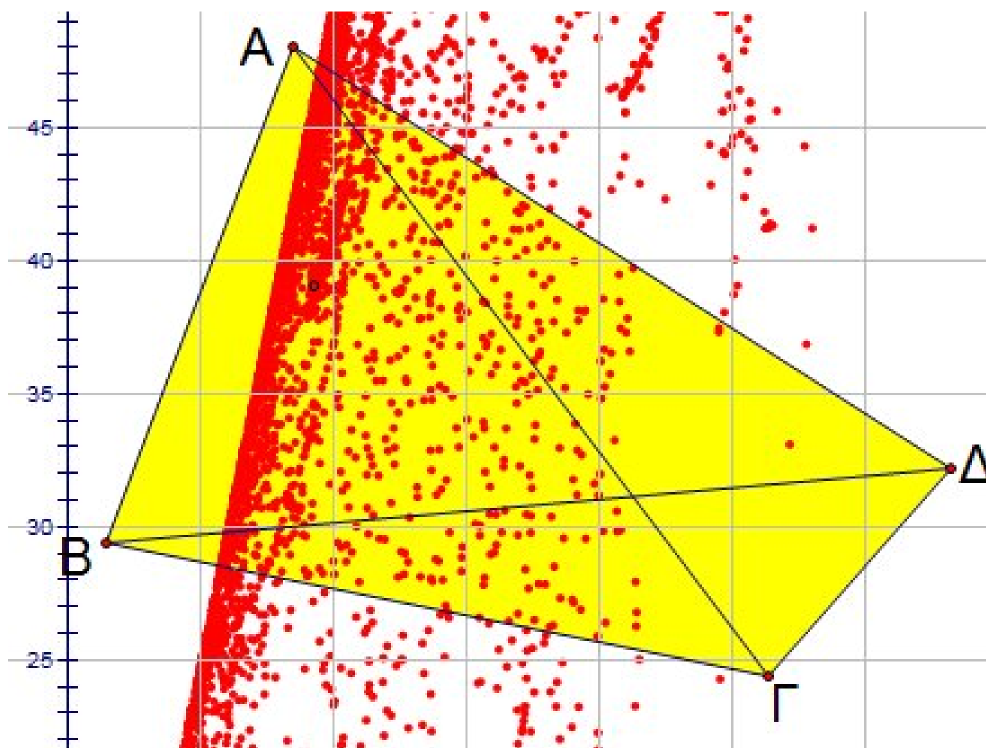


Σχήμα 2: *Το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει στο μέσον του ΕΖ*

Είναι προφανές, ότι ως προς το μέγιστο του εμβαδού, μπορούμε να φθάσουμε στην λύση με αλγεβρικό τρόπο (μη αρνητικό πρόσημο διακρίνουσας κτλ) ή με Ανάλυση (ρίζα πρώτης παραγώγου) ωστόσο, η διερεύνηση με το sketchpad, αφού υποδεικνύει ως λύση το Δ στο μέσον του ΕΖ, μπορεί να οδηγήσει και σε καθαρά Ευκλείδεια αντιμετώπιση, όπου κάθε άλλο ορθογώνιο να αποδειχθεί ότι έχει μικρότερο εμβαδόν από το ευρεθέν (κυριολεκτικώς, από το βασίμως εικαζόμενο) . Ως προς το ερώτημα της περιμέτρου, φαίνεται, και από το δυναμικό χειρισμό του σχήματος, ότι έχω μια γραμμική μεταβολή μεταξύ του διπλασίου της πλευράς ΕΖ και του διπλασίου του αντιστοίχου ύψους της. Στη θέση μέγιστου εμβαδού, έχομε θέση μέσης τιμής ελαχίστης και μεγίστης περιμέτρου πράγμα που φαίνεται από το σχήμα του γραφήματος.

Ένα άλλο, επίσης ενδιαφέρον γνωστό πρόβλημα (χρησιμοποιήθηκε ως υπόδειγμα στην πιστοποίηση β΄ επιπέδου το Νοέμβριο του 2008) μπορεί να εισαχθεί με την ανοικτή διατύπωση «Να εξετασθεί, πώς το εμβαδόν τετραπλεύρου εξαρτάται από τα μήκη των πλευρών των διαγωνίων του»

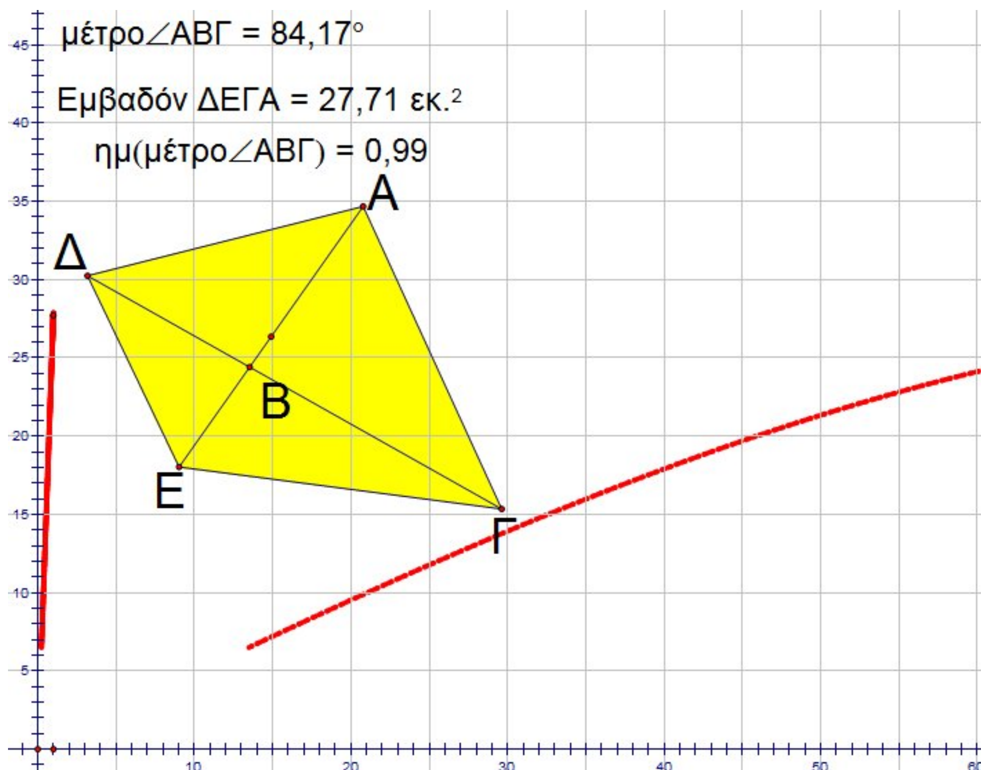
Στην διαπραγμάτευσή του, χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος μιας των διαγωνίων (της ΑΓ) και ως εξαρτημένη το εμβαδόν, έχομε το παρακάτω



Σχήμα 3: *Το νέφος των σημείων συγκεντρώνεται σε μια γωνία.*

σχήμα 3, όπου καθώς το σημείο Γ διαγράφει το επίπεδο, ενώ όλα τα άλλα παραμένουν σταθερά, το εμβαδόν του σχήματος παίρνει τιμές σε μια γωνία. Η ερμηνεία του αποτελέσματος είναι γόνιμη μαθηματικά, αφού φαίνεται, ότι το εμβαδόν, δεν είναι μονότιμη αντιστοίχιση του μήκους της ΑΓ, αλλά πλειότιμη . Η παρατήρηση ότι οι μέγιστες τιμές επιτυγχάνονται όταν $ΑΓ \perp ΒΔ$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει και μια άλλη μεταβλητή που επειδή δίνει μέγιστο για δεδομένο μήκος της ΑΓ σε κάθετη θέση με την ΒΔ, τότε αυτό είναι η γωνία των διαγωνίων και μάλιστα το ημίτονό της. Με ένα άλλο δυναμικό χειρισμό (σχήμα 4), όπου αυτή τη φορά η ΑΓ μένει σταθερή σε μήκος και περιστρέφεται, παίρνουμε δύο γραφήματα ανάλογα με την μεταβλητή ω (καμπύλη) ή ημω (ευθεία με την μεγάλη κλίση) γύρω από αυτή την διαδικασία μπορούν να αναπτυχθούν ενδιαφέρουσες συζητήσεις-επιχειρήματα για το ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης του εμβαδού (ορθότητα ενός τύπου από άποψη διαστάσεων) γιατί πρέπει ο τύπος να είναι συμμετρικός ως προς τις διαγωνίους, πώς θα παρακαμφθεί το εμπόδιο της

απεικόνισης ενός σημείου εκτός επιφάνειας εργασίας (π.χ. διαίρεση της εξαρτημένης μεταβλητής λ.χ. με το 10 ή επιλογή μη κανονικού συστήματος ορθογωνίων αξόνων και αν πρέπει να είναι κανονικό) βεβαίως, με καθοδηγούμενη
ανακάλυψη και περιορίζοντας το ανοικτόν του προβλήματος μπορεί κάποιος να



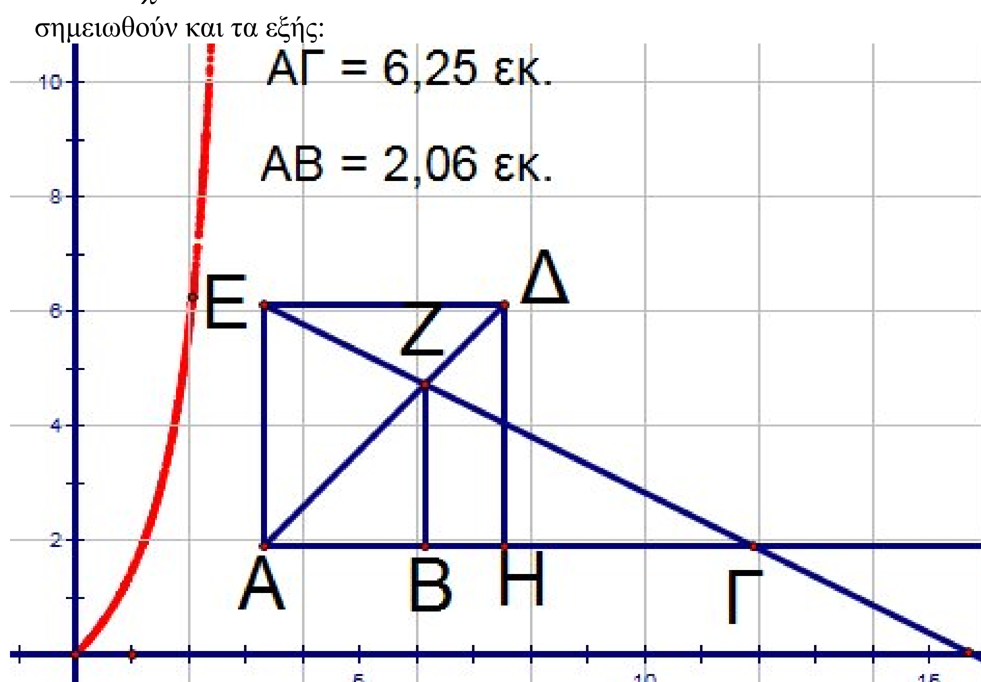
Σχήμα 4: *Τα διάγραμμα με μεταβλητή το ημφ και την φ*

φθάσει πιο σύντομα στον τύπο Ε=$\frac{1}{2}$ $\delta_1\delta_2$ημω

4. Ένα πρόβλημα σύνδεσης Ανάλυσης με Γεωμετρία: [6]

«Να κατασκευασθεί συνάρτηση $f\ :\ [0,1) \to [0,\infty)$ που να είναι 1-1 και επί» Αυτό είναι ένα πρόβλημα που ανάλογό του δεν υπάρχει στα εγχειρίδια Δ.Ε. Το λογισμικό sketchpad, έχει την δυνατότητα, να παρουσιάζει συγχρόνως Γεωμετρικά σχήματα και γραφική παράσταση συνάρτησης με μεταβλητές, μεγέθη του σχήματος. Άρα, ένας τρόπος προσέγγισης, μπορεί να γίνει μέσω του γεωμετρικού μοντέλου του σχήματος 5, όπου έχω ένα τετράγωνο ΑΗΔΕ, το Ζ κινείται στην διαγώνιο ΑΔ η προβολή Β του

Ζ κινείται στο [0,1) (ΑΗ)=1 και το Γ που είναι η εικόνα του Β, μέσω αυτής της απεικόνισης, στο $[0,\infty)$. Ο τύπος της προς εύρεση συναρτήσεως, προκύπτει από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ και ΖΒΓ, όπως και από τα όμοια ορθ. τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΒΖ , όπου αν $(AB)\equiv\chi \quad \kappa\alpha\iota \quad (A\Gamma)\equiv f(\chi)$, τότε μετά από πράξεις έχω ότι $f(\chi)=\dfrac{\chi}{1-\chi}$, ένα αποτέλεσμα, που προκύπτει από (εύκολη) γεωμετρική οδό. Να σημειωθούν και τα εξής:



Σχήμα 5: *Το υπόδειγμα απεικόνισης ευθυγράμμου τμήματος σε ημιευθεία.*

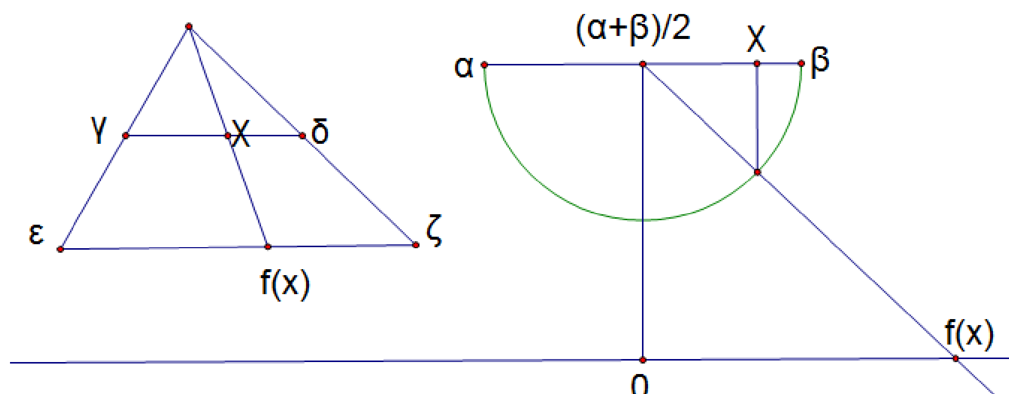
α) Το ίδιο το (δυναμικό) σχήμα είναι η παράσταση της συνάρτησης που παριστάνεται και στο ορθογώνιο σύστημα και της οποίας βρήκαμε τον τύπο με καθαρά γεωμετρική μέθοδο (τριπλή αναπαράσταση της *f*)

β) Στη θέση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ, μπορούμε να φανταστούμε το γράφημα οποιασδήποτε συνάρτησης που είναι αύξουσα και συνεχής στο διάστημα [0,1) με φ(0)=0 και φ(1)=c (c=1 για το τετράγωνο, αλλά μπορεί να έχω και ως ΑΗΔΕ οποιοδήποτε ορθ. παραλ/μο) Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνομε μια απεριόριστη κλάση παραδειγμάτων , με μικρή μόνο τροποποίηση του μοντέλου.

γ) Το αποτέλεσμα $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$, έχει μια σπουδαία γεωμετρική εποπτεία.

δ) Ομοίως εξαιρετική εποπτεία αποκτά και η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

ε) Πέραν του ανωτέρω μοντέλου υπάρχουν και ανάλογα (απλά) όπως τα παρακάτω μοντέλα συναρτήσεων (σχήμα 6) 1-1 και επί f : [γ,δ]→[ε,ζ] ή φ: (α,β)→ και τα οποία αναδεικνύουν κάποιες -μη προφανείς- πτυχές σύνδεσης της



Σχήμα 6: *Δύο υποδείγματα απεικονίσεων, ευθυγράμμου τμήματος σε ευθ. τμήμα καθώς και ευθ. τμήματος σε ευθεία.*

Ανάλυσης και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και κάθε ένα από τα οποία μπορεί να τροποποιηθεί καταλλήλως (όπως και το αρχικό) και να παράξει απειρία παραδειγμάτων συναρτήσεων με δεδομένα πεδία ορισμού και τιμών.

5. Γενικότερα συμπεράσματα

α) Η διερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων, φέρνει στην επιφάνεια άλλες μαθηματικές δεξιότητες, οι οποίες είναι πρωτόγνωρες για τους μαθητές της ΔΕ , πλην όμως τους εμπλέκουν στη λογική της έρευνας και ισχυροποίησης μιας εικασίας . Η αναγκαιότητα και μιας τέτοιας προσέγγισης, είναι προφανής, δεδομένου ότι απουσιάζει εντελώς από την ΔΕ . Τα υπάρχοντα λογισμικά προσομοίωσης σε άλλα μαθήματα (λ.χ. το modellus στη Φυσική) καλύπτουν μέρος αυτής της ανάγκης.

β)Το πείραμα, ιδίως για την περίπτωση της Γεωμετρίας, ίσως δεν πρέπει να χαρακτηρίζεται ως «εικονικό» αφού τα χειριζόμενα αντικείμενα είναι «πραγματικά» μαθηματικά αντικείμενα, σε σχέση με τα κατά κυριολεξίαν εικονικά πειράματα φυσικής ή χημείας με τα αντίστοιχα λογισμικά, (πλην ίσως προβλημάτων κινηματικής)

γ) Η ενοποιός έννοια της συνάρτησης μεταξύ Ευκλειδείου Γεωμετρίας και Ανάλυσης, σε συνδυασμό με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της, μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών, τείνει στον πυρήνα του γνωστού αφορισμού «Μαθηματικά= απεικονίσεις» χωρίς να απομακρύνεται από τον πυρήνα του άλλου γνωστού αφορισμού «Μαθηματικά = απόδειξη»

δ)Τα δυναμικά λογισμικά της Γεωμετρίας, έχουν σχεδιασθεί πάνω στις πλέον σύγχρονες θεωρίες διδακτικής, και συγκεκριμένα στον κοστρουκτιβισμό, όπου ο

μαθητής κατασκευάζει την γνώση. Θεωρούμε, ότι ο πειραματισμός, όπως νοείται στα ήδη παρουσιασθέντα, συνιστά μια καινοτομία (με πανάρχαια όμως καταβολή) καθώς όντως οι «μηχανικές μέθοδοι» του Αρχιμήδους, συνιστούν την αφετηρία κάθε Γεωμετρικής ανακάλυψης και αξίζει η εισαγωγή του στην ΔΕ, αφού φέρνει κοντύτερα τον μαθητή στην παραγωγή παρά στην αναπαραγωγή της γνώσης.

6. Βιβλιογραφικές-Διαδικτυακές αναφορές:

[1] Lakatos Imre: «Αποδείξεις και Ανασκευές»-*Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης*. Εκδόσεις Τροχαλία.1996 Αθήνα

[2] http://users.sch.gr/limpikis/eucli/isometries/reflection/pro3reflection.htm

[3] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fagnano.shtml

[4] http://mathworld.wolfram.com/FagnanosProblem.html

[5] http://demonstrations.wolfram.com/FagnanosProblem/

[6] Πλατάρος Γιάννης:*«Γεωμετρικά πρότυπα συναρτήσεων»* Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ Τρίκαλα, Νοέμβριος 2004. Διατίθεται και εδώ: http://homepages.pathfinder.gr/plataros/EMETrikala1.pdf